**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
 FACULTAD DE INGENIERÍA  
 <75.12> ANÁLISIS NUMÉRICO**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **DATOS DEL TRABAJO PRÁCTICO** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 2 | | | | | | | 2 | | 0 | | | 1 | | 6 | | | Modelación numérica del sistema hidráulico | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| AÑO | | | | | | | | | | de llenado y vaciado del tercer juego | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | de esclusas del canal de Panamá | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| TP NRO | | | | | | | CUAT | | | | | | | | | | TEMA | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **INTEGRANTES DEL GRUPO** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 6 | | | | | | | M | | e | | | r | | l | | | o | |  | | L | | e | | i | | v | | a | |  | | | N | | a | | | h | | u | | e | | l | |  | |  | |  | | 9 | | 2 | | 1 | | 1 | | 5 | |
| APELLIDO Y NOMBRE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | PADRÓN | | | | | | | | | |
|  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| GRUPO | | | | | | | APELLIDO Y NOMBRE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | PADRÓN | | | | | | | | | |
| **DATOS DE LA ENTREGA** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| C | T | 0 | | 6 | | . | | T | | X | | | T | | | 7 | | 4 | | - | | 9 | | 1 | | 0 | | 7 | | 3 | | 1 | | | 4 | | 1 | 2 | | 2 | | 0 | | 1 | | 6 | | 1 | | 4 | | 1 | | 2 | | 2 | | 0 | | 1 | | 6 |
| ARCHIVO | | | | | | | | | | | | | | | | NRO CONTROL | | | | | | | | | | | | | | | | FECHA VENC | | | | | | | | | | | | | | | | FECHA ENTR | | | | | | | | | | | | | | |
| **CORRECCIONES** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  |  | | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| FECHA | | | | | | | | | | | NOTA | | | | | | | | | | | | | OBSERVACIONES | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| DOCENTE | | | | | | | | | | | FIRMA | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Introducción

Las ecuaciones diferenciales relacionan funciones matemáticas con sus propias derivadas. Se presentan en numerosas aplicaciones de ingeniería, en el modelado de fenómenos físicos, y en otras áreas de estudio como la matemática o la economía.

En ciertos casos, cuando requiere hallar la solución de una ecuación diferencial, es posible obtener analíticamente una solución exacta. Sin embargo, cuando la resolución analítica es inviable, la solución se aproxima mediante métodos numéricos.

Actualmente existen diversos métodos numéricos que pueden ser ejecutados por computadora, haciendo uso del elevado poder de cálculo que estas poseen. No obstante, al momento de hallar una solución apropiada, deben considerarse los errores de truncamiento y de redondeo introducidos.

Objetivos

* Desarrollar un modelo numérico tridimensional de una parte del sistema hidráulico de llenado y vaciado del tercer juego de esclusas del canal de Panamá.
* Realizar un ajuste del modelo mediante la comparación de los resultados producidos contra las mediciones obtenidas en las pruebas iniciales de la obra.
* Comparar la eficiencia de distintos métodos de resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales respecto del paso de avance utilizado.

Resumen

En primer lugar, se desarrollarán los algoritmos para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales planteado a partir de los métodos y .

Luego, mediante sucesivas simulaciones se estimará el paso de avance necesario para acotar el error de truncamiento al valor requerido. Con el paso de avance establecido, se realizará una simulación de llenado de las esclusas para determinar el tiempo de estabilización de las oscilaciones en el nivel de agua.

Utilizando el paso de avance establecido, se realizará una calibración del modelo comparando las mediciones obtenidas en pruebas de llenado y vaciado de las esclusas contra los resultados de la simulación de las pruebas. Para cada prueba simulada se presentará el hidrograma correspondiente.

Finalmente, se llevará a cabo un análisis de los resultados obtenidos y de su relación con las bases teóricas correspondientes.

Discretización del problema

Para discretizar el sistema de ecuaciones diferenciales planteado utilizando un método numérico de orden 2, se optó por el método :

Definiendo:

Desarrollando el método:

Finalmente:

Para discretizar el problema utilizando un método numérico de orden 4, se eligió el método . De forma similar al método anterior se desarrolló la discretización:

Coeficiente de pérdida de energía de la válvula

Para obtener los valores aproximados de , se realizó una interpolación lineal entre los pares ordenados de la tabla de relaciones dada:

En donde:

Aceleración de la gravedad

El valor de la aceleración de la gravedad a nivel del mar se calculó a partir de la latitud geográfica del canal mediante la siguiente expresión:

Donde es la latitud de las compuertas de Cocolí.

Determinación del paso de avance

Dada una ecuación diferencial del tipo:

Planteando la resolución mediante un método numérico explícito con paso simple :

El error de truncamiento local debido a la discretización realizada está dado por:

Luego, es posible estimar el error considerando la aproximación:

Con el objetivo de determinar el paso de avance necesario para garantizar una cota del error de truncamiento introducido por la discretización, se realizaron sucesivas simulaciones reduciendo el paso de avance en cada una.

Partiendo de un paso inicial , y reduciéndolo en en cada simulación hasta acotar el error de truncamiento a a lo largo de toda la simulación, se obtuvo el paso de avance necesario.

En cada simulación, partiendo de los parámetros iniciales, se procedió a abrir las compuertas permitiendo el paso del agua entre los reservorios. Las compuertas se abrieron en su totalidad y luego se alcanzó la altura máxima de llenado . Luego el nivel de agua comenzó a oscilar disminuyendo la amplitud de oscilación a lo largo del tiempo. La simulación se detuvo al detectar una amplitud de oscilación menor a .

A continuación se presentan los parámetros iniciales y los resultados obtenidos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| inicial | 18 | 18 |
| inicial | 0 | 0 |
| Factor de fricción | 0,02 | 0,02 |
| Coeficiente de pérdida de energía | 0 | 0 |
| **Paso de cálculo** | **0,367** | **0,486** |
| Altura máxima de llenado | 10,413 | 10,397 |
| Tiempo de apertura | 240 | 240 |
| **Tiempo de estabilización** | **12305** | **12026** |
| Caudal máximo | 521,216 | 521,309 |

Los valores presentados en esta tabla se encuentran redondeados simétricamente.

Calibración del modelo

La comparación de las mediciones de las pruebas contra los resultados de las simulaciones se realizó mediante la siguiente expresión:

Dónde:

Con el objetivo de determinar el coeficiente de pérdida de energía que ajuste lo mejor posible los resultados de las simulaciones con las mediciones de las pruebas, se realizaron para cada prueba sucesivas simulaciones incrementando el en cada una.

Partiendo de un coeficiente de pérdida de energía inicial , e incrementándolo en en cada simulación hasta hallar el mínimo, se obtuvo el óptimo para cada prueba.

En cada simulación, partiendo de los parámetros iniciales, se procedió a abrir las compuertas permitiendo el paso del agua entre los reservorios. Las compuertas se abrieron en su totalidad y el nivel continuó aumentando. Siguiendo la rutina de la prueba correspondiente se procedió a cerrar las compuertas. Estas se cerraron completamente minimizando el caudal de agua. La simulación se detuvo al cumplirse el tiempo total de la prueba.

A continuación se presentan los parámetros iniciales y los resultados obtenidos:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Prueba 1 | Prueba 2 | Prueba 3 | Prueba 4 |
| inicial | 11,934 | 22,252 | 24,996 | 24,892 |
| inicial | 5,423 | 11,265 | 9,329 | 7,483 |
| Factor de fricción | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 |
| **Coeficiente de pérdida de energía** | **1,501** | **0,958** | **1,116** | **0,858** |
| Paso de cálculo | 0,367 | 0,367 | 0,367 | 0,367 |
| Tiempo de apertura | 60 | 120 | 180 | 240 |
| Tiempo de apertura total | 158 | 230 | 309 | 345 |
| Tiempo de cierre | 90 | 90 | 90 | 90 |
| **Caudal máximo** | **268,364** | **380,737** | **431,563** | **442,433** |
| Velocidad media máxima | 4,974 | 7,057 | 7,999 | 8,201 |

Los valores presentados en esta tabla se encuentran redondeados simétricamente.

A continuación se presentan los hidrogramas correspondientes a cada simulación realizada con el de mejor ajuste:

Conclusiones

La primera simulación de llenado se realizó con los métodos numéricos y . Ya que para ambos algoritmos se impuso la misma condición sobre el error de truncamiento, era esperable que el paso de avance requerido por el primer método sea menor al del segundo por ser menor su orden.

Por otro lado, el modelo no sólo predijo correctamente las oscilaciones en el nivel de agua durante el llenado sino también la disminución de su amplitud al aumentar el tiempo de simulación, lo que permitió determinar el tiempo de estabilización bajo el criterio establecido.

Al calcular los valores de mediante una interpolación lineal se está introduciendo un nuevo error de truncamiento debido a la aproximación realizada ya que la función no es de naturaleza lineal. Este error puede disminuirse mejorando el método de interpolación.

Al ajustar el modelo mediante la comparación de los resultados de la simulación contra las mediciones reales, se obtuvo para cada prueba un coeficiente de pérdida de energía. Sin embargo, no se esperaba que este coeficiente tuviera una variación tan notable para cada prueba simulada, por ser considerado una constante propia del problema.

Por último, comparando los hidrogramas realizados para cada prueba se pudo observar que al aumentar el tiempo de apertura se produjo un aumento en las oscilaciones del caudal de agua durante el llenado. Además como era de esperarse al iniciar el cierre de la compuerta el caudal de agua disminuye hasta anularse en el momento en que la compuerta se encuentra totalmente cerrada.

Anexo: Código fuente y salida

Tanto el código fuente como los archivos de salida y el original de este informe se encuentran disponibles públicamente en <https://github.com/nmerloleiva/canal>.